

Приложение №5 к ОПОП

Государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Кунгурский колледж агротехнологий и управления»



**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
ОП.02.01 Математические методы решения прикладных профессиональных
задач**

**по специальности 35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной
техники и оборудования
базовой подготовки**

Методические рекомендации по выполнению практических работ составлены в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ОП. 02. 01 Математические методы решения прикладных профессиональных задач

Организация-разработчик: **государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Кунгурский колледж агротехнологий и управления»**

Составитель:

М.Л. Каменева, преподаватель

Ф.И.О., должность

№	ОГЛАВЛЕНИЕ	Стр.
1.	Пояснительная записка	4
2.	Практическое занятие №1. Элементарные функции, их свойства и графики	5
3.	Практическое занятие № 2. Вычисление пределов функций, раскрытие неопределённостей	6
4.	Практическое занятие № 3. Исследование функции на непрерывность	8
5.	Практическое занятие № 4. Операции над матрицами	11
6.	Практическое занятие № 5. Вычисление определителей	14
7.	Практическое занятие № 6. Решение СЛАУ методом Крамера	16
8.	Практическое занятие № 7. Решение СЛАУ методом Гаусса	18
9.	Практическое занятие № 8. Решение СЛАУ разными способами	20
10.	Практическое занятие № 9. Действия над комплексными числами	23
11.	Практическое занятие № 10. Составление матриц смежности и матриц инцидентности для графов заданных геометрически	24
12.	Практическое занятие № 11. Выполнение операций над множествами	25
13.	Практические занятия № 12. Нахождение вероятности событий	25
14.	Практическое занятие № 13. Построение для выборки ее диаграммы, расчет числовых характеристик	26
15.	Практическое занятие № 14. Нахождение случайной величины	27

Пояснительная записка

Методические рекомендации к выполнению практических работ по ОП.02.01

Математические методы решения прикладных профессиональных задач предназначены для организации самостоятельной работы обучающихся первого курса очного отделения специальности 35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования.

Учебным планом на изучение дисциплины отводится 48 часов, в том числе практических занятий –

28 часов. Практические занятия являются важной формой образовательного процесса и направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений, они составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.

Перед выполнением практической работы преподавателем проводится инструктаж, который включает цель задания, его содержание, время выполнения, основные требования к результатам работы, критерии оценки выполнения задания. Выполнению практических занятий предшествует проверка знаний студентов их теоретической готовности к выполнению задания. Практические занятия носят репродуктивный характер. Работы, носящие репродуктивный характер, отличаются тем, что при их проведении студенты пользуются подробными инструкциями, в которых указаны: цель работы, пояснения (теория, основные характеристики), порядок выполнения работы.

Критерии оценивания при выполнении практической работы:

Процент результативности (%)	Оценка уровня подготовки	Оценка
91 – 100	отлично	5
70 -90	хорошо	4
50 -69	удовлетворительно	3
Менее 50	неудовлетворительно	2

Время выполнения практической работы составляет 90 минут.

В процессе инструктажа преподаватель обращает внимание обучающихся на возможные встречающиеся типичные ошибки.

Практическое занятие №1. Элементарные функции, их свойства и графики

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек xOy с координатами $(x, f(x))$, где $x \in D(f)$.

Функция $f(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля, называется *четной (нечетной)*, если для любого значения $x \in D(f)$ $f(-x) = f(x)$ [соответственно $f(-x) = -f(x)$]. График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной – относительно начала координат.

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует постоянное положительное число T такое, что при $x \in D(f)$ и $x+T \in D(f)$ выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$. Основным периодом функции называется наименьшее положительное число τ , обладающее указанным свойством.

2.2.2 Задания для самостоятельной работы.

$$1) y = |x+1| + |x-1| \quad 2) y = |x^2 - 1| \quad 3) y = 1 - \sqrt{|x|} \quad 4) y = \lg \frac{10}{x} \quad 5) y = |\lg x|$$

$$6) y = \lg|x| \quad 7) y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq -1 \\ -x, & \text{если } -1 < x < 0 \\ x^2, & \text{если } x \geq 0 \end{cases} \quad 8) y = \begin{cases} 2, & \text{если } x < 0 \\ x+2, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

При построении графиков функций применяются следующие приемы: построение «по точкам»; действия с графиками (сложение, вычитание, умножение графиков); преобразования графиков (сдвиг, растяжение).

Исходя из графика функции $y = f(x)$, можно построить графики функций:

1. $y = f(x-a)$ - первоначальный график, сдвинутый вдоль оси Ox на величину a ;
2. $y = f(x)+b$ - тот же график, сдвинутый вдоль оси Oy на величину b ;
3. $y = Af(x)$ - исходный график, растянутый A раз вдоль оси Oy ;
4. $y = f(kx)$ - тот же график, растянутый в $1/k$ раз вдоль оси Ox .

Таким образом, можно по графику $y = f(x)$ построить график функции вида $y = Af[k(x-a)]+b$.

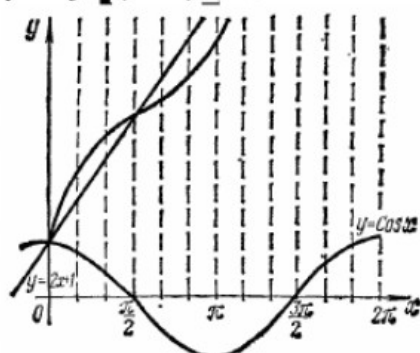


Рисунок 2.1

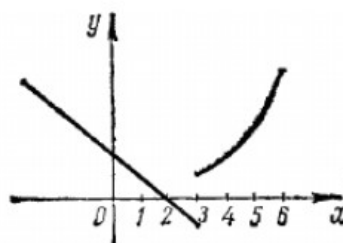


Рисунок 2.2

2.3.2 Задания для самостоятельной работы.

Построить графики

$$y = \sin 2x \quad y = 2 \sin x \quad y = \sin \frac{x}{2} \quad y = -\sin x \quad y = \sin|x| \quad y = |\sin x|$$

Практическое занятие № 2. Вычисление пределов функций, раскрытие неопределённостей

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta > 0$, что для всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записывают $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Аналогично:

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, если $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $|x| > N$, N – произвольное положительное число.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > M$ при $|x - a| < \delta$, где M – произвольное сколько угодно большое положительное число. В этом случае функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \rightarrow a$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, то функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \rightarrow a$.

Простейшие свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций можно записать с помощью следующих условных соотношений: $A \neq 0$

$$A \cdot \infty = \infty, \frac{A}{0} = \infty, \frac{A}{\infty} = 0, \infty + A = \infty, +\infty + \infty = +\infty.$$

Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах.

Если существуют конечные $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, то

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (c - \text{константа})$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad (\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0).$$

Обычно для отыскания предела используют теоремы о пределах. Из этих теорем следует: если предельная точка входит в область определения функции, стоящей под знаком предела, то для его отыскания нужно найти значение функции в этой точке.

Пример 1. Найти пределы

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 5}{4x - 2} = \frac{3 \cdot 1 + 5}{4 \cdot 1 - 2} = \frac{8}{2} = 4,$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x}{\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Но часто теоремы о пределах применить нельзя. Это бывает в случаях, так называемых неопределенных выражений: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 . Рассмотрим основные способы раскрытия неопределенностей.

Пример 2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x}{x^4 + x^2 - 2}$

Решение. Теорему о пределе частного применять нельзя, т.к. числитель и знаменатель неограниченно возрастают при $x \rightarrow \infty$. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. В подобных примерах числитель и знаменатель дроби целесообразно разделить на высшую степень переменной. В нашем примере разделим числитель и знаменатель на x^4 , затем перейдем к пределу.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x}{x^4 + x^2 - 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4}} = \frac{3 - 0}{1 + 0 - 0} = 3$$

Пример 4. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x - 7}$

Решение. Если под знаком предела имеется иррациональность, то для раскрытия неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$ умножают числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное иррациональному, полученную дробь сокращают и переходят к пределу.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x - 7} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt{2+x} - 3)(\sqrt{2+x} + 3)}{(x - 7)(\sqrt{2+x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 + x - 9}{(x - 7)(\sqrt{2+x} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{(x - 7)(\sqrt{2+x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{\sqrt{2+x} + 3} = \frac{1}{\sqrt{2+7} + 3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

2.15.2 Задания для самостоятельной работы.

1. Найти указанные пределы

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3x - 5x^3}{7x^3 + 2x^2 + 3}$

б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x - 6}$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 2}{x^2 - x}$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 6x^3}{2x^3 + 3x^2 + 3}$

д) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 5x + 6}$

е) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-2} - 2}{\sqrt{x+1} - 2}$

ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2x + 3x^4}{1 + 2x^2}$

з) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 5x + 6}$

и) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-2} - 2}{\sqrt{x+1} - 2}$

Практическое занятие № 3. Исследование функции на непрерывность

Цель: закрепить навыки исследования функции на непрерывность и точки разрыва

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

Компьютерные программы: компьютерные программы не используются

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Функция непрерывна в точке k , если предел функции в данной точке равен значению функции в этой точке: $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$

2 Определение включает условия:

- функция должна быть определена в точке k , то есть должно существовать значение $f(k)$;
- должен существовать общий предел функции $\lim_{x \rightarrow k} f(x)$, это подразумевает существование и равенство односторонних пределов: $\lim_{x \rightarrow k-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow k+0} f(x)$;
- предел функции в данной точке должен быть равен значению функции в этой точке: $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$.

3 Если в точке k нарушено условие непрерывности и односторонние пределы конечны, но не равны, то она называется точкой разрыва первого рода

4 Если хотя бы один из пределов $f(k-0)$ или $f(k+0)$ не существует или равен бесконечности, то точка k называется точкой разрыва второго рода.

5 Если существуют левый и правый пределы функции в точке и они равны друг другу, но не совпадают со значением функции $f(x)$ в точке k : $f(k) \neq f(k-0) = f(k+0)$ или функция $f(k)$ не определена в точке k , то точка k называется точкой устранимого разрыва

Задание

Исследовать функцию на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют.

Примеры выполнения:

Исходные данные:

Задание 1 $f(x) = \begin{cases} x^2; & x < 1 \\ (x-1)^2; & 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x; & x > 2 \end{cases}$

Задание 2 $f(x) = \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1}$

Задание 3 $f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 4}{x+4}; f(x) = \frac{x+4}{2x^2 + 7x - 4}$

Задание 4 $f(x) = x^2 - \frac{|x+1|}{x+1} - 1$

Решение:**Задание 1**

Функция непрерывна на интервалах $(-\infty; 1); [1; 2]; (2; +\infty)$. Тогда, разрыв возможен только на концах указанных промежутков, то есть в точках $x = 1$ и $x = 2$. Найдем односторонние пределы и значение функции в каждой из этих точек.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^2 = 0$$

Односторонние пределы в $x = 1$ существуют, но значения их различны, значит в точке $x = 1$ разрыв первого рода.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x-1)^2 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (3-x) = 1; \quad f(2) = 1$$

Односторонние пределы и значение функции в точке $x = 2$ равны, значит точка $x = 2$ – точка непрерывности

Задание 2

Функция $f(x) = \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1}$ не определена, если $x-3=0$ и $x+1=0$, т.к. эти выражения находятся в знаменателе, значит точки разрыва $x = 3$ и $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1} = \infty$$

Односторонние пределы в $x = 3$ равны бесконечности, значит в точке $x = 3$ разрыв второго рода.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1} = \infty$$

Односторонние пределы в $x = -1$ равны бесконечности, значит в точке $x = -1$ разрыв второго рода.

Задание 3

а) Функция не определена, если $x+4=0$, т.к. это выражение находится в знаменателе, значит точка разрыва $x = -4$

Разложим числитель функции $f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 4}{x+4}$ на множители, для этого найдем корни квадратного уравнения $2x^2 + 7x - 4 = 0$.

$$D = 49 + 32 = 81 = 9^2; \quad x_{1,2} = \frac{-7 \pm 9}{4}; \quad x_1 = -4; \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 7x - 4 = 2(x+4)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x+4)(2x-1)$$

$$f(x) = \frac{(x+4)(2x-1)}{x+4} = 2x-1$$

$$\lim_{x \rightarrow -4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4-0} (2x-1) = -9; \quad \lim_{x \rightarrow -4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4+0} (2x-1) = -9$$

Существуют левый и правый пределы функции в точке $x = -4$ и они равны друг другу, но функция $f(x)$ не определена в точке -4 , значит точка -4 – точка устранимого разрыва

б) Разложим знаменатель функции $f(x) = \frac{x+4}{2x^2 + 7x - 4}$ на множители, для этого найдем корни квадратного уравнения $2x^2 + 7x - 4 = 0$.

$$f(x) = \frac{x+4}{2x^2 + 7x - 4} = \frac{x+4}{(x+4)(2x-1)} = \frac{1}{(2x-1)}$$

Функция $f(x)$ не определена в точках -4 и $0,5$

Точка -4 – точка устранимого разрыва, т.к. $\lim_{x \rightarrow -4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4-0} \frac{1}{(2x-1)} = -\frac{1}{9}$;

$$\lim_{x \rightarrow -4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4+0} \frac{1}{(2x-1)} = -\frac{1}{9}$$

$\lim_{x \rightarrow 0,5-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0,5-0} \frac{1}{(2x-1)} = \infty$; $\lim_{x \rightarrow 0,5+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0,5+0} \frac{1}{(2x-1)} = \infty \Rightarrow$ в точке $x = 0,5$ разрыв второго рода.

Задание 4

$$f(x) = x^2 - \frac{|x+1|}{x+1} - 1 = \begin{cases} x^2 - \frac{x+1}{x+1} - 1 = x^2 - 2; & x \geq -1 \\ x^2 + \frac{x+1}{x+1} - 1 = x^2; & x < -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2; & x \geq -1 \\ x^2; & x < -1 \end{cases}$$

Найдем односторонние пределы и значение функции в каждой из этих точек.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} x^2 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} x^2 - 2 = -1$$

Односторонние пределы в $x = -1$ существуют, но значения их различны, значит в точке $x = -1$ разрыв первого рода.

Задания к практической работе.

Задание 1

1	$f(x) = \begin{cases} x+2; & x < -1 \\ x^2+1; & -1 \leq x \leq 1 \\ -x+3; & x > 1 \end{cases}$	2	$f(x) = \begin{cases} x^2+1; & x \leq 0 \\ 1+2x; & 0 < x < 2 \\ x-2; & x \geq 2 \end{cases}$	3	$f(x) = \begin{cases} 2; & x < -1 \\ 2-2x; & -1 \leq x < 1 \\ \ln x; & x \geq 1 \end{cases}$
4	$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+2}; & x < -2 \\ 2; & -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2x}; & x > 2 \end{cases}$	5	$f(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ \operatorname{tg} x; & 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ 1; & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$	6	$f(x) = \begin{cases} x^3+1; & x \leq -1 \\ 1+2x; & -1 < x < 2 \\ \frac{1}{x-2}; & x \geq 2 \end{cases}$
7	$f(x) = \begin{cases} 1; & x < -1 \\ 2+3x; & -1 \leq x < 1 \\ \ln x; & x \geq 1 \end{cases}$	8	$f(x) = \begin{cases} x^3+1; & x \leq -1 \\ 1+2x; & -1 < x < 2 \\ x-1; & x \geq 2 \end{cases}$	9	$f(x) = \begin{cases} 2; & x \leq -2 \\ x^2; & -2 < x \leq 1 \\ -2x+3; & x > 1 \end{cases}$
10	$f(x) = \begin{cases} -x+1; & x \leq -1 \\ x^2-1; & -1 \leq x \leq 2 \\ 3; & x > 2 \end{cases}$	11	$f(x) = \begin{cases} x+4; & x < -1 \\ x^2+2; & -1 \leq x < 1 \\ 2x; & x \geq 1 \end{cases}$	12	$f(x) = \begin{cases} x; & x < 0 \\ x^2; & 0 \leq x < 1 \\ x-1; & x \geq 1 \end{cases}$

Практическое занятие № 4. Операции над матрицами

Цель: закрепить навыки выполнения действий над матрицами

Содержание работы:

Основные понятия

1 Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица $m \times n$ чисел a_{ij} , $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$, расположенных в m строках и n столбцах:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2 Матрица называется квадратной, если $m=n$ (n - порядок матрицы).

3 Матрица называется единичной, если все элементы на ее главной диагонали равны 1. (Все остальные элементы при этом равны 0.) Единичная матрица чаще всего обозначается буквой E или E_n , где n - порядок матрицы.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

4 Две матрицы A и B равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый размер $m \times n$ и их соответствующие элементы равны. Пусть заданы две матрицы A и B , причем размерность первой из них равна размерности второй.

5 Чтобы умножить матрицу на число, нужно умножить на это число все элементы матрицы.

6 Суммой двух матриц одинаковой размерности, называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых.

7 Произведением матриц называется матрица, элементы которой вычисляются по формуле: $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$, $i=1, \dots, m, j=1, \dots, k$. Произведение матриц A и B обозначается AB , т.е. $C=AB$. Пусть заданы две матрицы A и B , причем число столбцов первой из них равно числу строк второй.

8 Произведение матриц существует тогда и только тогда, когда число столбцов в первой матрице равно числу строк во второй.

9 Матрица, получающаяся из матрицы A заменой строк столбцами, называется транспонированной по отношению к матрице и обозначается A^T .

10 Матрица называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1} , т.е. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

11 Определителем n -го порядка называется число, полученное из квадратной таблицы размерности $n \times n$.

12 Определитель 2-го порядка - это число вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

13 Определители третьего порядка можно вычислять по правилу Саррюса, методом треугольника, разложением по строке или столбцу.

14 Пусть a_{ij} - элемент определителя Δ . Минором M_{ij} будем называть определитель, полученный из исходного вычеркиванием i - строки и j -го столбца.

15 Алгебраическим дополнением к элементу a_{ij} называется число вида $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

16 Обратную матрицу можно найти методом Гаусса $(A|E) \rightarrow \dots \rightarrow (E|A^{-1})$ или по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^T$

17 Для того, чтобы матрица имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой матрицы был отличен от нуля.

Задание

Даны матрицы A и B .

1 Выписать матрицу A^T , минор матрицы M_{21} , отвечающий элементу a_{21} .

2 Вычислить $|A|$ тремя способами.

3 Вычислить $3A$, $2A - 3B$, $A \cdot B$, $B \cdot A$.

4 Вычислить B^{-1} двумя способами.

5 Вычислить $4A + 5B^{-1} + A \cdot B$

Задания к практической работе.

1	$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -7 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	2	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$	4	$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & 5 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 6 & 10 & -7 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -6 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	6	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -11 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -5 \\ 9 & 4 & -7 \\ 14 & 6 & -11 \end{pmatrix}$
7	$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	8	$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
9	$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -5 \\ 4 & 3 & 6 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	10	$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 8 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 10 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$
11	$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$	12	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$
13	$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	14	$A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ 5 & -3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 10 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Практическое занятие № 5. Вычисление определителей

Цель работы: научиться вычислять определители второго и третьего порядка.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Определителем второго порядка, соответствующим матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ называется число } a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2 Определитель второго порядка равен разности попарных произведений элементов главной и побочной диагоналей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3 Определителем третьего порядка, соответствующим матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ называется число } a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

4 Определитель можно вычислить, используя непосредственно его определение.

5 Определитель можно вычислить с помощью его разложения по элементам строки или столбца.

6 Определитель можно вычислить способом приведения к треугольному виду, тогда треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Задания к практической работе.

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \quad 3. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad 4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad 5. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad 7. \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \quad 8. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad 9. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad 10. \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$11. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad 12. \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 13. \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad 14. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 15. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$16. \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad 17. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 9 & 8 \end{vmatrix} \quad 18. \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 9 \end{vmatrix} \quad 19. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 9 & 8 \end{vmatrix} \quad 20. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$21. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad 22. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad 23. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} \quad 24. \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} \quad 25. \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$26. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad 27. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad 28. \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad 29. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$30. \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \quad 31. \begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad 32. \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad 33. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Исходные данные:

1 Решить методом Крамера систему линейных уравнений третьего

порядка $\begin{cases} x - 4y - 2z = 3 \\ 3x - 5y - 6z = 23 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$

Решение:

а) Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & -5 & -6 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5 + 6) + 4 \cdot (3 + 18) - 2(3 + 15) = 1 + 84 - 36 = 49$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.б) Вычислим Δ_x :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 23 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 23 & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 23 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-5 + 6) + 4 \cdot (23) - 2(23) = 3 + 92 - 46 = 49$$

в) Вычислим Δ_y :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 23 & -6 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 23 & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 23 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 23 - 3 \cdot (3 + 18) - 2(-69) = 23 - 66 + 138 = 98$$

г) Вычислим Δ_z :

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & -5 & 23 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 23 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 23 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -23 + 4 \cdot (-69) + 3(3 + 15) = -23 - 276 + 54 = -245$$

г) По формулам Крамера получим:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{49}{49} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{98}{49} = 2; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-245}{49} = -5$$

Ответ: (1; 2; -5)

Задания к практической работе.

1 $\begin{cases} 3x+5y+z=-2 \\ -2x-2y-3z=7 \\ x+4y+z=-5 \end{cases}$	2 $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x-y+3z=2 \\ 4x+3y-z=5 \end{cases}$	3 $\begin{cases} x+y-3z=-3 \\ 2x-y-6z=9 \\ -x+y+4z=-6 \end{cases}$
4 $\begin{cases} 3x-6y-z=1 \\ -x+2y+z=-3 \\ 2x+y+3z=-4 \end{cases}$	5 $\begin{cases} 3x+5y+z=2 \\ 2x-y+2z=1 \\ -x+3y-3z=-4 \end{cases}$	6 $\begin{cases} -x-y+z=-5 \\ 3x+2y+2z=-3 \\ -2x-2y-3z=1 \end{cases}$
7 $\begin{cases} x-y-2z=6 \\ -2x-3y+5z=7 \\ 4x+2y-z=3 \end{cases}$	8 $\begin{cases} 4x-3y+z=3 \\ 3x+2y-2z=-3 \\ -x+3y+z=10 \end{cases}$	9 $\begin{cases} -x+3y-4z=-3 \\ 2x-y-3z=5 \\ -3x+4y+5z=-2 \end{cases}$
10 $\begin{cases} x-y+z=4 \\ 5x-3y-2z=1 \\ 3x+2y-3z=-1 \end{cases}$	11 $\begin{cases} 3x-2y+2z=3 \\ x+2y-5z=3 \\ -4x+y+2z=-3 \end{cases}$	12 $\begin{cases} 3x-2y+2z=5 \\ 5x+y-3z=-6 \\ -2x+2y-z=1 \end{cases}$
13 $\begin{cases} 3x-4y+5z=1 \\ x+2y-z=5 \\ 2x-y+2z=3 \end{cases}$	15 $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x-5y+2z=3 \\ 3x-8y+2z=5 \end{cases}$	16 $\begin{cases} 3x-2y+3z=-2 \\ x+5y-2z=-1 \\ -4x-3y-5z=-5 \end{cases}$
17 $\begin{cases} 4x+5y+4z=3 \\ -7x+2y-z=2 \\ 3x+y+z=-1 \end{cases}$	18 $\begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ x-3y-5z=4 \\ 4x+5y-3z=-1 \end{cases}$	19 $\begin{cases} x-y+z=-4 \\ 5x+6y-2z=-1 \\ 4x-3y-2z=4 \end{cases}$
20 $\begin{cases} -2x+3y-2z=4 \\ x+y+z=-7 \\ 4x-3y-z=6 \end{cases}$	21 $\begin{cases} x+y-z=-3 \\ 4x-2y-5z=5 \\ 3x+2y+7z=4 \end{cases}$	22 $\begin{cases} x-y-z=-3 \\ 2x-2y+5z=1 \\ 3x-y-z=3 \end{cases}$
23 $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ 3x+3y+2z=7 \\ 2x-y-3z=8 \end{cases}$	24 $\begin{cases} 5x+2y-z=-1 \\ 3x-y+3z=-4 \\ x+2y-3z=3 \end{cases}$	25 $\begin{cases} x+y+z=-4 \\ 3x+4y-3z=1 \\ 4x+5y-3z=-1 \end{cases}$

Практическое задание № 7. Решение СЛАУ методом Гаусса

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений третьего порядка методом Крамера и методом Гаусса.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Система линейных уравнений, содержащая m уравнений и n переменных имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где, a_{ij} ($i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$) и b_i ($i=1,2,\dots,m$), постоянные величины.

2 Решением системы уравнений называется такой n -мерный вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, который одновременно является решением каждого из уравнений системы.

4 Суть метода Гаусса состоит в том, что с помощью некоторых операций исходную систему уравнений можно свести к более простой системе. Эта простая система имеет треугольный вид:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1N}x_N &= b_1 \\a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2N}x_N &= b_2 \\a_{33}x_3 + \dots + a_{3N}x_N &= b_3 \\&\dots \\&\dots a_{NN}x_N = b_N\end{aligned}$$

Особенность этой системы - в строках с номером i все коэффициенты a_{ij} при $j < i$ равны нулю. Если мы смогли привести нашу систему уравнений к такому треугольному виду, то решить уравнения уже просто. Из последнего уравнения находим $x_N = b_N / a_{NN}$. Далее подставляем его в предпоследнее уравнение и находим из него x_{N-1} . Подставляем оба найденных решения в следующее с конца уравнение и находим x_{N-2} . И так далее, пока не найдем x_1 , на чем решение заканчивается. Такая процедура называется обратной прогонкой.

5 Если к матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ добавить в качестве $(n+1)$ -

ого столбца матрицу-столбец свободных членов, то получим так называемую расширенную матрицу системы линейных уравнений, а столбец свободных членов отделяют вертикальной линией от остальных столбцов, то есть,

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

6 Для приведения системы уравнений к треугольному виду воспользуемся свойствами: если с системой линейных алгебраических уравнений произвести следующие действия:

- поменять местами два уравнения,
- умножить обе части какого-либо уравнения на произвольное и отличное от нуля действительное (или комплексное) число k ,
- к обеим частям какого-либо уравнения прибавить соответствующие части другого уравнения, умноженные на произвольное число k , то получится эквивалентная система, которая имеет такие же решения (или также как и исходная не имеет решений).

7 Две системы называются эквивалентными (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение

8 Преобразование, применение которого превращает систему в новую систему, эквивалентную исходной, называется эквивалентным или равносильным преобразованием

2 Решить методом Гаусса систему линейных уравнений третьего порядка

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = 3 \\ 3x - 5y - 6z = 23 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$$

Решение:

Запишем систему в матричном виде и приведем ее к треугольной матрице:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & -6 & 23 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \\ 0 & 13 & 7 & -9 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 49 & -245 \end{array} \right)$$

$$\text{Тогда получим: } z = \frac{-245}{49} = -5; \quad y = \frac{14}{7} = 2; \quad x = 3 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) = 1$$

Задания к практической работе.

$$1 \quad \begin{cases} 3x + 5y + z = -2 \\ -2x - 2y - 3z = 7 \\ x + 4y + z = -5 \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x - y + 3z = 2 \\ 4x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

$$3 \quad \begin{cases} x + y - 3z = -3 \\ 2x - y - 6z = 9 \\ -x + y + 4z = -6 \end{cases}$$

$$4 \quad \begin{cases} 3x - 6y - z = 1 \\ -x + 2y + z = -3 \\ 2x + y + 3z = -4 \end{cases}$$

$$5 \quad \begin{cases} 3x + 5y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 1 \\ -x + 3y - 3z = -4 \end{cases}$$

$$6 \quad \begin{cases} -x - y + z = -5 \\ 3x + 2y + 2z = -3 \\ -2x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$7 \quad \begin{cases} x - y - 2z = 6 \\ -2x - 3y + 5z = 7 \\ 4x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

$$8 \quad \begin{cases} 4x - 3y + z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = -3 \\ -x + 3y + z = 10 \end{cases}$$

$$9 \quad \begin{cases} -x + 3y - 4z = -3 \\ 2x - y - 3z = 5 \\ -3x + 4y + 5z = -2 \end{cases}$$

$$10 \quad \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 5x - 3y - 2z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$11 \quad \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 3 \\ x + 2y - 5z = 3 \\ -4x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

$$12 \quad \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x + y - 3z = -6 \\ -2x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$13 \quad \begin{cases} 3x - 4y + 5z = 1 \\ x + 2y - z = 5 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$15 \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - 5y + 2z = 3 \\ 3x - 8y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$16 \quad \begin{cases} 3x - 2y + 3z = -2 \\ x + 5y - 2z = -1 \\ -4x - 3y - 5z = -5 \end{cases}$$

$$17 \quad \begin{cases} 4x + 5y + 4z = 3 \\ -7x + 2y - z = 2 \\ 3x + y + z = -1 \end{cases}$$

$$18 \quad \begin{cases} 2x + 2y - z = 1 \\ x - 3y - 5z = 4 \\ 4x + 5y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$19 \quad \begin{cases} x - y + z = -4 \\ 5x + 6y - 2z = -1 \\ 4x - 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$20 \quad \begin{cases} -2x + 3y - 2z = 4 \\ x + y + z = -7 \\ 4x - 3y - z = 6 \end{cases}$$

$$21 \quad \begin{cases} x + y - z = -3 \\ 4x - 2y - 5z = 5 \\ 3x + 2y + 7z = 4 \end{cases}$$

$$22 \quad \begin{cases} x - y - z = -3 \\ 2x - 2y + 5z = 1 \\ 3x - y - z = 3 \end{cases}$$

$$23 \quad \begin{cases} x + y - z = -1 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \\ 2x - y - 3z = 8 \end{cases}$$

$$24 \quad \begin{cases} 5x + 2y - z = -1 \\ 3x - y + 3z = -4 \\ x + 2y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$25 \quad \begin{cases} x + y + z = -4 \\ 3x + 4y - 3z = 1 \\ 4x + 5y - 3z = -1 \end{cases}$$

Практическое занятие № 8. Решение СЛАУ разными способами

Задача. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение:

Решим систему матричным способом, для этого вычислим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \text{ где } A_{ij} - \text{ алгебраические дополнения к элементам матрицы.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 5 - 1 + 10 - 6 = 12 \neq 0$$

- матрица невырожденная.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(10 - 2) = -8$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3 + 1) = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 5) = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 5 = 8$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -8 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -8 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \cdot 12 & 3 \cdot 3 & (-3) \cdot 3 \\ -8 \cdot 12 & 5 \cdot 3 & (-1) \cdot 3 \\ 4 \cdot 12 & (-4) \cdot 3 & 8 \cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ -84 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Решим систему методом Крамера. Главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Разложим определитель по элементам первой строки, пользуясь

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

формулой

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

Запишем и вычислим вспомогательные определители

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 12 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 12 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 12 \cdot 8 + 12 = -84$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 12 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 + 12 + 12 \cdot 4 = 60$$

$$\text{Тогда } x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{0}{12} = 0$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = -\frac{84}{12} = -7$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{60}{12} = 5$$

Ответ: (0; -7; 5)

Решим систему методом Гаусса, для этого составим расширенную матрицу системы и упростим ее приведением к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array} \right)$$

Таким образом, система равносильна системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + \frac{5}{4}x_3 = -\frac{3}{4} \\ -3x_3 = -15 \end{cases}$$

Находим $x_3 = 5$

$$x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} \cdot 5 = -\frac{28}{4} = -7$$

$$x_1 = 12 - 7 - 5 = 0$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -7$, $x_3 = 5$

При решении всеми методами одной и той же системы, мы получим один ответ.

Задание к практической работе

Задача. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{array}{lll} 1. \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases} & 2. \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \\ 2x + 7y - 5z = 13 \end{cases} & 3. \begin{cases} 2x - 7y + 5z = 9 \\ x + 5y - 5z = -2 \\ 4x - 2y + 7z = 24 \end{cases} \\ 4. \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \\ y + z = 2 \end{cases} & 5. \begin{cases} x + 3y + 4z = 17 \\ 2x - 3y + 5z = 16 \\ 3x + 4y - z = 7 \end{cases} & 6. \begin{cases} 2x + 2y - 4z = 6 \\ x + 3y - 5z = 6 \\ 3x - 2y + 6z = 6 \end{cases} \\ 7. \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 22 \\ x - 3y - 6z = -9 \\ 2x + 4y - 4z = 10 \end{cases} & 8. \begin{cases} 2x - y - z = 14 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases} & 9. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases} \end{array}$$

Практическоезанятия № 9. Действия над комплексными числами

Цель работы: закрепить навыки выполнения действий с комплексными числами

Задание

1 Даны числа z_1 и z_2 . Выполнить следующие действия над комплексными числами в алгебраической форме: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) z_1 / z_2 ;

д) $(z_1 + 3)z_2 + \frac{z_1 \cdot i}{z_2 - 4i} - 2$

2 Выполнить действия над числами в тригонометрической форме: а) $z_1 \cdot z_2$; б) z_1 / z_2 ; в) z_2^6 .

3 Выполнить действия в тригонометрической форме и представить результат в тригонометрической, алгебраической и показательной формах

4 Найти значения корней

Задания к практической работе.

Задание 1

- $z_1 = 3 + 2i, z_2 = -1 + 5i$
- $z_1 = 1 + 3i, z_2 = -2 + 4i$
- $z_1 = -2 + i, z_2 = 4 + i$
- $z_1 = -2 + 2i, z_2 = 1 + 3i$
- $z_1 = 5 + i, z_2 = -1 - i$
- $z_1 = 3 - 2i, z_2 = 4 + 2i$
- $z_1 = 5 + i, z_2 = 1 + 2i$
- $z_1 = 3 + i, z_2 = 4 + 2i$
- $z_1 = 1 - 2i, z_2 = 3 + 2i$
- $z_1 = 4 + 3i, z_2 = -1 - i$

Задание 3

- $\left(\frac{0,5 - i \cdot 0,5\sqrt{3}}{0,5\sqrt{3} - i \cdot 0,5} \right)^3$
- $(2 + \sqrt{12}i)^5$
- $[(\sqrt{3} - i)(-1 + i)]^4$
- $\left(\frac{1 - i}{-2 - 2i} \right)^4$
- $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i} \right)^{-3}$
- $\left(\frac{2\sqrt{3} - 2i}{\sqrt{3} + i} \right)^3$
- $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i} \right)^6$
- $\left(\frac{1 - i}{-2 - 2i} \right)^{-6}$
- $[(\sqrt{3} - i)(-1 + i)]^6$
- $\left(\frac{2\sqrt{3} - 2i}{\sqrt{3} + i} \right)^3$

Задание 2

- $z_1 = 8(\cos 55^\circ + \sin 55^\circ), z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ),$
- $z_1 = 5(\cos 48^\circ + \sin 48^\circ), z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ),$
- $z_1 = 3(\cos 70^\circ + \sin 70^\circ), z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ),$
- $z_1 = 10(\cos 105^\circ + \sin 105^\circ), z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ),$
- $z_1 = 12(\cos 145^\circ + \sin 145^\circ), z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ),$
- $z_1 = 7(\cos 255^\circ + \sin 255^\circ), z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ),$
- $z_1 = 9(\cos 168^\circ + \sin 168^\circ), z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ),$
- $z_1 = 6(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ), z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ),$
- $z_1 = 3(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ), z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ),$
- $z_1 = 10(\cos 75^\circ + \sin 75^\circ), z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ),$

Задание 4

- $\sqrt[4]{i}$
- $\sqrt[4]{-i}$
- $\sqrt[3]{-i}$
- $\sqrt[3]{-1}$
- $\sqrt[4]{16i}$
- $\sqrt[4]{-16i}$
- $\sqrt{16i}$
- $\sqrt[3]{-8i}$
- $\sqrt[3]{-8}$
- $\sqrt[3]{8i}$

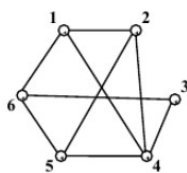
Практическоезанятия № 10. Составление матриц смежности и матриц инцидентности для графов заданных геометрически

Цель работы: задание графа, вычисление степеней вершин.

Задания к практической работе.

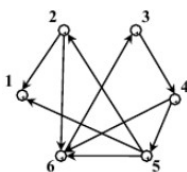
- Орграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
 $E = \{(1; 3); (1; 6); (2; 5); (3; 2); (3; 4);$
 $(4; 1); (4; 5); (5; 3); (6; 2)\}$

2



- Неограф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
 $E = \{(1; 2); (1; 5); (2; 3); (3; 1); (3; 4);$
 $(4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 3)\}$

4



7

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	1	1	0	1	0	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0	1

8

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	1	1
2	1	0	0	0	1	0
3	0	0	0	1	0	1
4	0	0	1	0	1	0
5	1	1	0	1	0	1
6	1	0	1	0	1	0

- Орграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 4); (1; 5); (2; 1); (2; 3); (3; 4);$
 $(4; 2); (4; 6); (5; 3); (6; 3)\}$

Практическое занятия № 11. Выполнение операций над множествами

Цель работы: Выполнение операций над множествами.

Задания к практической работе.

1	$A=\{b, e, f, k, t\}; B=\{f, i, j, p, y\};$ $C=\{j, k, l, y\}; D=\{i, j, s, t, u, y, z\};$ $X=(A \cap C) \cup (B \cap C);$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (D \setminus C)$	8	$A=\{c, m, n, o, q\}; B=\{c, d, m, w\};$ $C=\{m, n, q\}; D=\{c, m, p\};$ $X=(A \cup B) \cap C;$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$
2	$A=\{a, h, m, o, r\}; B=\{j, k, o, u, y\};$ $C=\{g, h, j\}; D=\{g, j, q\};$ $X=(A \cap C) \cup (D \cap B);$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (D \setminus C)$	9	$A=\{b, d, l, p\}; B=\{b, d, e, l, p, x\}$ $C=\{k, l, p, t\}; D=\{d, k, o, p, q, u, v\};$ $X=(A \setminus B) \cap (C \cap D);$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$
3	$A=\{c, e, h, n\}; B=\{e, f, k, n, x\};$ $C=\{b, c, h, p, r, s\}; D=\{b, e, g\};$ $X=(A \setminus B) \cap (C \cup D);$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$	10	$A=\{a, b, f, g, i\}; B=\{c, f, g, i, s, v\};$ $C=\{a, g, h, i\}; D=\{f, w, x\};$ $X=(A \cap B) \cup C;$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$
4	$A=\{b, f, g, m, o\}; B=\{b, g, h, l, u\};$ $C=\{e, f, m\}; D=\{e, g, l, p, q, u, v\};$ $X=(A \cap C) \cup B;$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$	11	$A=\{b, c, h, l, j\}; B=\{e, h, l, s, w\};$ $C=\{a, b, j, k, l, m\}; D=\{a, h, l, w, x\};$ $X=(A \setminus C) \cap \bar{B};$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$
5	$A=\{a, e, f, i\}; B=\{a, b, k, n\};$ $C=\{e, f, n, o, w, x\}; D=\{a, d, e, o, p, t, u\};$ $X=(A \cup B) \cap D;$ $Y=(\bar{A} \cap \bar{B}) \setminus (C \cup D)$	12	$A=\{a, b, h, j, l\}; B=\{b, c, h, l, r, v\};$ $C=\{j, k, n, t, z\}; D=\{b, i, k, v, w\};$ $X=(A \cup B) \cap C;$ $Y=(\bar{A} \cap \bar{B}) \setminus (C \cup D)$

Практические занятия № 12. Нахождение вероятности событий

Цель работы: вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности и по формуле геометрической вероятности, вычисление вероятностей совместных событий, определение вероятности по формулам суммы и произведения

Задания к практической работе.

1 Устройство состоит из четырех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго, третьего и четвертого элементов соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что за время t безотказно будут работать только два элемента

2 Самолет бомбит объект, занимающий площадь 100π м². Зона бомбометания – эллипс с полуосями 200 м и 250 м. Определить вероятность прямого попадания в объект одной бомбой, если предполагать, что попадания бомб в любую точку зоны бомбометания равновозможны.

3 Определить число промахов, если известно, что произведено 16 выстрелов, а частота попадания равна $\frac{1}{4}$

4 Трое охотников одновременно выстрелили по лисе, которая была убита одной пулей. Определить вероятность того, что лиса убита третьим охотником, если вероятности попадания для них соответственно равны 0,2; 0,4; 0,6.

5 Автомобиль во время своего пути может остановиться по четырем причинам. Вероятности остановки по этим причинам соответственно равны 0,2; 0,4; 0,3; 0,7. Найти вероятность хотя бы одной остановки по какой-либо из причин

6 При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов

7 На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что из четырех, вынутых по одной и расположенных в одну линию карточках можно будет прочесть слово трос

8 В ящике 20 сигнальных ракет, из которых 6 красного цвета, остальные зеленого цвета. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу пяти ракет 3 окажутся красного цвета?

Практическое занятие № 13. Построение для выборки ее диаграммы, расчет числовых характеристик

Учебная цель: научиться строить графические диаграммы выборки, рассчитывать характеристики выборки

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Для выборки 1,1,2,-5,4,3,3,8,8,1 определите объем и размах. Запишите выборку в виде вариационного ряда и в виде статистического ряда. Найдите выборочное распределение.

2. Для выборки, заданной статистическим рядом

2	4	6	8
5	2	1	3

постройте 1) полигон частот; 2) полигон относительных частот;

3. Для выборки, заданной вариационным рядом -5, -5, 2, 3, 5,10,15, 15, 20, 20, найдите выборочную среднюю $\bar{x}$; выборочную дисперсию S_0 , несмещенную выборочную дисперсию S .

4. Произведено выборочное обследование коммерческих фирм по затратам на рекламу, результаты которого представлены в таблице:

Затраты на рекламу	Кол-во фирм
--------------------	-------------

(усл. ден. ед.)	
40-60	4
60-80	3
80-100	5
100-120	6
120-140	2

По данным выборочного обследования постройте гистограмму частот, используя мастер диаграмм в MS Excel.

Вариант 2

1. Для выборки -3,1,2,4,3,4,4,1,2,1 определите объем и размах. Запишите выборку в виде вариационного ряда и в виде статистического ряда. Найдите выборочное распределение.

2. Для выборки, заданной статистическим рядом

-1	1	3	7
1	3	4	2

постройте 1) полигон частот; 2) полигон относительных частот

3. Для выборки, заданной статистическим рядом

-1	1	3	5	7	9
2	2	1	3	1	1

найдите выборочную среднюю $\bar{x}$; выборочную дисперсию S_0 , несмещенную выборочную дисперсию S ;

4. В результате выборочного обследования коммерческих банков о размере прибыли за год получено следующее распределение:

Размер прибыли (млн руб.)	Число банков
10- 20	5
20-30	10
30-40	20
40-50	15
50-60	10

Практическоезанятия № 14. Нахождение случайной величины

Цель: научиться определять математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины по заданному распределению.

Задания для индивидуальной работы:

Задание №1. Найдите математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Вариант 1.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,1	0,1	0,09	0,3	0,009	0,3	0,001

Вариант 2.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,2	0,3	0,2	0,06	0,1	0,006	0,1	0,034

Вариант 3.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,3	0,1	0,005	0,1	0,005	0,3	0,09

Вариант 4.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,2	0,4	0,1	0,002	0,1	0,09	0,1	0,008

Вариант 5.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,2	0,1	0,008	0,2	0,09	0,3	0,002

Вариант 6.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,3	0,2	0,1	0,003	0,2	0,095	0,1	0,002

Задание №2. Дискретные независимые случайные величины заданы законами распределения. Найти математическое ожидание произведения $M(XY)$ и $M(2Y)$.

Вариант 1.

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

Вариант 2.

X	2	1
p	0,6	0,4

Y	1	1,25
p	0,8	0,2

Вариант 3.

X	3	2
p	0,7	0,3

Y	0,65	2
p	0,5	0,5

Вариант 4.

X	1	3
p	0,1	0,9

Y	1	1,35
p	0,4	0,6

Вариант 5.

X	2	4
p	0,4	0,6

Y	2	1,85
p	0,8	0,2

Вариант 6.

X	1	4
p	0,5	0,5

Y	0,4	1
p	0,9	0,1

Задание №3.

- Вариант 1.** Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель $p_1=0,6$, $p_2=0,4$, $p_3=0,5$ и $p_4=0,7$. Найти математическое ожидание общего числа попадания.
- Вариант 2.** Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель $p_1=0,3$, $p_2=0,4$, $p_3=0,6$ и $p_4=0,5$. Найти математическое ожидание общего числа попадания.
- Вариант 3.** Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель $p_1=0,1$, $p_2=0,2$, $p_3=0,6$ и $p_4=0,9$. Найти математическое ожидание общего числа попадания.
- Вариант 4.** Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель $p_1=0,7$, $p_2=0,2$, $p_3=0,8$ и $p_4=0,5$. Найти математическое ожидание общего числа попадания.
- Вариант 5.** Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель $p_1=0,5$, $p_2=0,4$, $p_3=0,9$ и $p_4=0,2$. Найти математическое ожидание общего числа попадания.
- Вариант 6.** Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель $p_1=0,3$, $p_2=0,7$, $p_3=0,3$ и $p_4=0,5$. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Задание №4.

- Вариант 1.** Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,2. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 10 деталей.
- Вариант 2.** Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,3. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 12 деталей.
- Вариант 3.** Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,7. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 15 деталей.
- Вариант 4.** Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,9. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 18 деталей.
- Вариант 5.** Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,8. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 6 деталей.
- Вариант 6.** Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,2. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 20 деталей.

Задание №5

- Вариант 1.** Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 100 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,7.
- Вариант 2.** Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 130 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,6.
- Вариант 3.** Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 150 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,2.
- Вариант 4.** Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 200 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,4.
- Вариант 5.** Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 400 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,8.
- Вариант 6.** Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 250 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,3.

Задание №6

- Вариант 1.** Случайная величина X может принимать два возможных значения x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем $x_2 > x_1$. Найти x_1 и x_2 , зная, что $M(X) = 2,7$ и $D(X) = 0,21$.
- Вариант 2.** Случайная величина X может принимать два возможных значения x_1 с вероятностью 0,4 и x_2 с вероятностью 0,6, причем $x_1 > x_2$. Найти x_1 и x_2 , зная, что $M(X) = 3,4$ и $D(X) = 0,24$.

Контрольные вопросы:

1. Дать определение математического ожидания
2. Что показывает дисперсия случайной величины?
3. Как найти среднее квадратичное отклонение?

