

Государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Кунгурский колледж агротехнологий и управления»

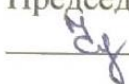


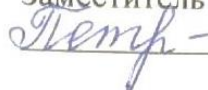
**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**ОП.01 Математические методы решения прикладных профессиональных
задач**

по специальности 21.02.19 Землеустройство

Рассмотрено и одобрено
на заседании методической
комиссии естественно-научных
дисциплин
Протокол №1
от «31» августа 2023 г.

Председатель МК
 В.Н. Чернышева

Утверждаю
Заместитель директора
 - Л.И. Петрова

Методические рекомендации по выполнению практических работ составлены в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ОП.01 Математические методы решения прикладных профессиональных задач

Организация-разработчик: **государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Кунгурский сельскохозяйственный колледж»**

Составитель:
М.Л. Каменева, преподаватель

Ф.И.О., должность

№	ОГЛАВЛЕНИЕ	Стр.
1.	Пояснительная записка	4
2.	Практическое занятия №1. Элементарные функции, их свойства и графики	5
3.	Практическое занятие № 2. Вычисление пределов функций, раскрытие неопределённостей	6
4.	Практическое занятие № 3. Исследование функции на непрерывность	8
5.	Практическое занятие № 4. Операции над матрицами	11
6.	Практическое занятие № 5. Вычисление определителей	14
7.	Практическое занятие № 6. Решение СЛАУ методом Крамера	16
8.	Практическое занятия № 7. Решение СЛАУ методом Гаусса	18
9.	Практическое занятие № 8. Решение СЛАУ разными способами	20
10.	Практическое занятия № 9. Действия над комплексными числами	23
11.	Практическое занятия № 10. Составление матриц смежности и матриц инцидентности для графов заданных геометрически	24
12.	Практическое занятия № 11. Выполнение операций над множествами	25
13.	Практические занятия № 12. Нахождение вероятности событий	25
14.	Практическое занятие № 13. Построение для выборки ее диаграммы, расчет числовых характеристик	26
15.	Практическое занятия № 14. Нахождение случайной величины	27

Пояснительная записка

Методические рекомендации к выполнению практических работ по ОП.01 Математические методы решения прикладных профессиональных задач предназначены для организации самостоятельной работы обучающихся первого курса очного отделения специальности 21.02.19 Землеустройство.

Учебным планом на изучение дисциплины отводится 48 часов, в том числе практические занятия – 28 часов. Практические занятия являются важной формой образовательного процесса и направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений, они составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.

Перед выполнением практической работы преподавателем проводится инструктаж, который включает цель задания, его содержание, время выполнения, основные требования к результатам работы, критерии оценки выполнения задания. Выполнению практических занятий предшествует проверка знаний студентов - их теоретической готовности к выполнению задания. Практические занятия носят репродуктивный характер. Работы, носящие репродуктивный характер, отличаются тем, что при их проведении студенты пользуются подробными инструкциями, в которых указаны: цель работы, пояснения (теория, основные характеристики), порядок выполнения работы.

Критерии оценивания при выполнении практической работы:

Процент результативности (%)	Оценка уровня подготовки	Оценка
91 – 100	отлично	5
70 - 90	хорошо	4
50 - 69	удовлетворительно	3
Менее 50	неудовлетворительно	2

Время выполнения практической работы составляет 90 минут.
В процессе инструктажа преподаватель обращает внимание обучающихся на возможные встречающиеся типичные ошибки.

Практическое занятия №1. Элементарные функции, их свойства и графики

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек xOy с координатами $(x, f(x))$, где $x \in D(f)$.

Функция $f(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля, называется *четной (нечетной)*, если для любого значения $x \in D(f)$ $f(-x) = f(x)$ [соответственно $f(-x) = -f(x)$]. График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной – относительно начала координат.

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует постоянное положительное число T такое, что при $x \in D(f)$ и $x+T \in D(f)$ выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$. Основным периодом функции называется наименьшее положительное число τ , обладающее указанным свойством.

2.2.2 Задания для самостоятельной работы.

$$\begin{aligned} 1) y = |x+1| + |x-1| \quad 2) y = |x^2 - 1| \quad 3) y = 1 - \sqrt{|x|} \quad 4) y = \lg \frac{10}{x} \quad 5) y = |\lg x| \\ 6) y = \lg |x| \quad 7) y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq -1 \\ -x, & \text{если } -1 < x < 0 \\ x^2, & \text{если } x \geq 0 \end{cases} \quad 8) y = \begin{cases} 2, & \text{если } x < 0 \\ x+2, & \text{если } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

При построении графиков функций применяются следующие приемы: построение «по точкам»; действия с графиками (сложение, вычитание, умножение графиков); преобразования графиков (сдвиг, растяжение).

Исходя из графика функции $y = f(x)$, можно построить графики функций:

1. $y = f(x-a)$ - первоначальный график, сдвинутый вдоль оси Ox на величину a ;
2. $y = f(x)+b$ - тот же график, сдвинутый вдоль оси Oy на величину b ;
3. $y = Af(x)$ - исходный график, растянутый A раз вдоль оси Oy ;
4. $y = f(kx)$ - тот же график, растянутый в $1/k$ раз вдоль оси Ox .

Таким образом, можно по графику $y = f(x)$ построить график функции вида $y = Af[k(x-a)]+b$.

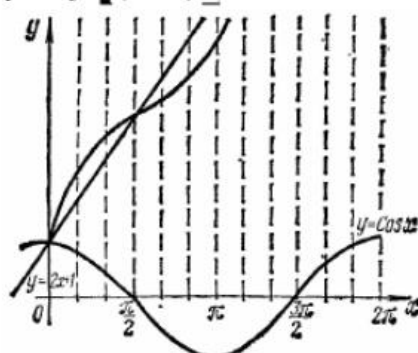


Рисунок 2.1

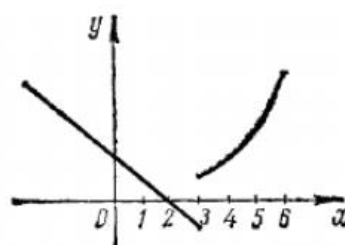


Рисунок 2.2

2.3.2 Задания для самостоятельной работы.

Построить графики

$$y = \sin 2x \quad y = 2 \sin x \quad y = \sin \frac{x}{2} \quad y = -\sin x \quad y = \sin |x| \quad y = |\sin x|$$

Практическое занятие № 2. Вычисление пределов функций, раскрытие неопределённостей

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta > 0$, что для всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записывают $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Аналогично:

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, если $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $|x| > N$, N – произвольное положительное число.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > M$ при $|x - a| < \delta$, где M – произвольное сколько угодно большое положительное число. В этом случае функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \rightarrow a$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, то функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \rightarrow a$.

Простейшие свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций можно записать с помощью следующих условных соотношений: $A \neq 0$

$$A \cdot \infty = \infty, \frac{A}{0} = \infty, \frac{A}{\infty} = 0, \infty + A = \infty, +\infty + \infty = +\infty.$$

Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах.

Если существуют конечные $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, то

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (c – константа)
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, ($\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$).

Обычно для отыскания предела используют теоремы о пределах. Из этих теорем следует: если предельная точка входит в область определения функции, стоящей под знаком предела, то для его отыскания нужно найти значение функции в этой точке.

Пример 1. Найти пределы

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 5}{4x - 2} = \frac{3 \cdot 1 + 5}{4 \cdot 1 - 2} = \frac{8}{2} = 4,$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x}{\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Но часто теоремы о пределах применить нельзя. Это бывает в случаях, так называемых неопределенных выражений: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 . Рассмотрим основные способы раскрытия неопределенностей.

Пример 2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x}{x^4 + x^2 - 2}$

Решение. Теорему о пределе частного применять нельзя, т.к. числитель и знаменатель неограниченно возрастают при $x \rightarrow \infty$. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. В подобных примерах числитель и знаменатель дроби целесообразно разделить на высшую степень переменной. В нашем примере разделим числитель и знаменатель на x^4 , затем перейдем к пределу.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x}{x^4 + x^2 - 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4}} = \frac{3 - 0}{1 + 0 - 0} = 3$$

Пример 4. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x - 7}$

Решение. Если под знаком предела имеется иррациональность, то для раскрытия неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$ умножают числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное иррациональному, полученную дробь сокращают и переходят к пределу.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x - 7} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt{2+x} - 3)(\sqrt{2+x} + 3)}{(x - 7)(\sqrt{2+x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 + x - 9}{(x - 7)(\sqrt{2+x} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{(x - 7)(\sqrt{2+x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{\sqrt{2+x} + 3} = \frac{1}{\sqrt{2+7} + 3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

2.15.2 Задания для самостоятельной работы.

1. Найти указанные пределы

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3x - 5x^3}{7x^3 + 2x^2 + 3}$

б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x - 6}$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 2}{x^2 - x}$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 6x^3}{2x^3 + 3x^2 + 3}$

д) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 5x + 6}$

е) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-2} - 2}{\sqrt{x+1} - 2}$

ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2x + 3x^4}{1 + 2x^2}$

з) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 5x + 6}$

и) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-2} - 2}{\sqrt{x+1} - 2}$

Практическое занятие № 3. Исследование функции на непрерывность

Цель: закрепить навыки исследования функции на непрерывность и точки разрыва

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

Компьютерные программы: компьютерные программы не используются

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Функция непрерывна в точке k , если предел функции в данной точке равен значению функции в этой точке: $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$

2 Определение включает условия:

- функция должна быть определена в точке k , то есть должно существовать значение $f(k)$;
- должен существовать общий предел функции $\lim_{x \rightarrow k} f(x)$, это подразумевает существование и равенство односторонних пределов: $\lim_{x \rightarrow k-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow k+0} f(x)$;
- предел функции в данной точке должен быть равен значению функции в этой точке: $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$.

3 Если в точке k нарушено условие непрерывности и односторонние пределы конечны, но не равны, то она называется точкой разрыва первого рода

4 Если хотя бы один из пределов $f(k-0)$ или $f(k+0)$ не существует или равен бесконечности, то точка k называется точкой разрыва второго рода.

5 Если существуют левый и правый пределы функции в точке и они равны друг другу, но не совпадают со значением функции $f(x)$ в точке k : $f(k) \neq f(k-0) = f(k+0)$ или функция $f(k)$ не определена в точке k , то точка k называется точкой устранимого разрыва

Задание

Исследовать функцию на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют.

Примеры выполнения:

Исходные данные:

Задание 1
$$f(x) = \begin{cases} x^2; & x < 1 \\ (x-1)^2; & 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x; & x > 2 \end{cases}$$

Задание 2
$$f(x) = \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1}$$

Задание 3
$$f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 4}{x+4}; \quad f(x) = \frac{x+4}{2x^2 + 7x - 4}$$

Задание 4
$$f(x) = x^2 - \frac{|x+1|}{x+1} - 1$$

Решение:**Задание 1**

Функция непрерывна на интервалах $(-\infty; 1)$; $[1; 2]$; $(2; +\infty)$. Тогда, разрыв возможен только на концах указанных промежутков, то есть в точках $x = 1$ и $x = 2$. Найдем односторонние пределы и значение функции в каждой из этих точек.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^2 = 0$$

Односторонние пределы в $x = 1$ существуют, но значения их различны, значит в точке $x = 1$ разрыв первого рода.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x-1)^2 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (3-x) = 1; \quad f(2) = 1$$

Односторонние пределы и значение функции в точке $x = 2$ равны, значит точка $x = 2$ – точка непрерывности

Задание 2

Функция $f(x) = \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1}$ не определена, если $x-3=0$ и $x+1=0$, т.к. эти выражения находятся в знаменателе, значит точки разрыва $x = 3$ и $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1} = \infty$$

Односторонние пределы в $x = 3$ равны бесконечности, значит в точке $x = 3$ разрыв второго рода.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1} = \infty$$

Односторонние пределы в $x = -1$ равны бесконечности, значит в точке $x = -1$ разрыв второго рода.

Задание 3

а) Функция не определена, если $x+4=0$, т.к. это выражение находится в знаменателе, значит точка разрыва $x = -4$

Разложим числитель функции $f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 4}{x+4}$ на множители, для этого найдем корни квадратного уравнения $2x^2 + 7x - 4 = 0$.

$$D = 49 + 32 = 81 = 9^2; \quad x_{1,2} = \frac{-7 \pm 9}{4}; \quad x_1 = -4; \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 7x - 4 = 2(x+4)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x+4)(2x-1)$$

$$f(x) = \frac{(x+4)(2x-1)}{x+4} = 2x-1$$

$$\lim_{x \rightarrow -4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4-0} (2x-1) = -9; \quad \lim_{x \rightarrow -4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4+0} (2x-1) = -9$$

Существуют левый и правый пределы функции в точке $x = -4$ и они равны друг другу, но функция $f(x)$ не определена в точке -4 , значит точка -4 – точка устранимого разрыва

б) Разложим знаменатель функции $f(x) = \frac{x+4}{2x^2 + 7x - 4}$ на множители, для этого найдем корни квадратного уравнения $2x^2 + 7x - 4 = 0$.

$$f(x) = \frac{x+4}{2x^2 + 7x - 4} = \frac{x+4}{(x+4)(2x-1)} = \frac{1}{(2x-1)}$$

Функция $f(x)$ не определена в точках -4 и $0,5$

Точка -4 – точка устранимого разрыва, т.к. $\lim_{x \rightarrow -4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4-0} \frac{1}{(2x-1)} = -\frac{1}{9}$;

$$\lim_{x \rightarrow -4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4+0} \frac{1}{(2x-1)} = -\frac{1}{9}$$

$\lim_{x \rightarrow 0,5-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0,5-0} \frac{1}{(2x-1)} = \infty$; $\lim_{x \rightarrow 0,5+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0,5+0} \frac{1}{(2x-1)} = \infty \Rightarrow$ в точке $x = 0,5$ разрыв второго рода.

Задание 4

$$f(x) = x^2 - \frac{|x+1|}{x+1} - 1 = \begin{cases} x^2 - \frac{x+1}{x+1} - 1 = x^2 - 2; & x \geq -1 \\ x^2 + \frac{x+1}{x+1} - 1 = x^2; & x < -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2; & x \geq -1 \\ x^2; & x < -1 \end{cases}$$

Найдем односторонние пределы и значение функции в каждой из этих точек.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} x^2 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} x^2 - 2 = -1$$

Односторонние пределы в $x = -1$ существуют, но значения их различны, значит в точке $x = -1$ разрыв первого рода.

Задания к практической работе.

Задание 1

1	$f(x) = \begin{cases} x+2; & x < -1 \\ x^2+1; & -1 \leq x \leq 1 \\ -x+3; & x > 1 \end{cases}$	2	$f(x) = \begin{cases} x^2+1; & x \leq 0 \\ 1+2x; & 0 < x < 2 \\ x-2; & x \geq 2 \end{cases}$	3	$f(x) = \begin{cases} 2; & x < -1 \\ 2-2x; & -1 \leq x < 1 \\ \ln x; & x \geq 1 \end{cases}$
4	$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+2}; & x < -2 \\ 2; & -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2x}; & x > 2 \end{cases}$	5	$f(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ \operatorname{tg} x; & 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ 1; & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$	6	$f(x) = \begin{cases} x^3+1; & x \leq -1 \\ 1+2x; & -1 < x < 2 \\ \frac{1}{x-2}; & x \geq 2 \end{cases}$
7	$f(x) = \begin{cases} 1; & x < -1 \\ 2+3x; & -1 \leq x < 1 \\ \ln x; & x \geq 1 \end{cases}$	8	$f(x) = \begin{cases} x^3+1; & x \leq -1 \\ 1+2x; & -1 < x < 2 \\ x-1; & x \geq 2 \end{cases}$	9	$f(x) = \begin{cases} 2; & x \leq -2 \\ x^2; & -2 < x \leq 1 \\ -2x+3; & x > 1 \end{cases}$
10	$f(x) = \begin{cases} -x+1; & x \leq -1 \\ x^2-1; & -1 \leq x \leq 2 \\ 3; & x > 2 \end{cases}$	11	$f(x) = \begin{cases} x+4; & x < -1 \\ x^2+2; & -1 \leq x < 1 \\ 2x; & x \geq 1 \end{cases}$	12	$f(x) = \begin{cases} x; & x < 0 \\ x^2; & 0 \leq x < 1 \\ x-1; & x \geq 1 \end{cases}$

Практическое занятие № 4. Операции над матрицами

Цель: закрепить навыки выполнения действий над матрицами

Содержание работы:

Основные понятия

1 Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица $m \times n$ чисел a_{ij} , $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$, расположенных в m строках и n столбцах:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2 Матрица называется квадратной, если $m=n$ (n - порядок матрицы).

3 Матрица называется единичной, если все элементы на ее главной диагонали равны 1. (Все остальные элементы при этом равны 0.) Единичная матрица чаще всего обозначается буквой E или E_n , где n - порядок матрицы.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

4 Две матрицы A и B равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый размер $m \times n$ и их соответствующие элементы равны. Пусть заданы две матрицы A и B , причем размерность первой из них равна размерности второй.

5 Чтобы умножить матрицу на число, нужно умножить на это число все элементы матрицы.

6 Суммой двух матриц одинаковой размерности, называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых.

7 Произведением матриц называется матрица, элементы которой вычисляются по формуле: $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$, $i=1, \dots, m, j=1, \dots, k$. Произведение матриц A и B обозначается AB , т.е. $C=AB$. Пусть заданы две матрицы A и B , причем число столбцов первой из них равно числу строк второй.

8 Произведение матриц существует тогда и только тогда, когда число столбцов в первой матрице равно числу строк во второй.

9 Матрица, получающаяся из матрицы A заменой строк столбцами, называется транспонированной по отношению к матрице и обозначается A^T .

10 Матрица называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1} , т.е. $A A^{-1} = A^{-1} A = E$.

11 Определителем n -го порядка называется число, полученное из квадратной таблицы размерности $n \times n$.

12 Определитель 2-го порядка - это число вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

13 Определители третьего порядка можно вычислять по правилу Саррюса, методом треугольника, разложением по строке или столбцу.

14 Пусть a_{ij} - элемент определителя Δ . Минором M_{ij} будем называть определитель, полученный из исходного вычеркиванием i - строки и j -го столбца.

15 Алгебраическим дополнением к элементу a_{ij} называется число вида $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

16 Обратную матрицу можно найти методом Гаусса $(A|E) \rightarrow \dots \rightarrow (E|A^{-1})$ или по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^T$

17 Для того, чтобы матрица имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой матрицы был отличен от нуля.

Задание

Даны матрицы A и B .

1 Выписать матрицу A^T , минор матрицы M_{21} , отвечающий элементу a_{21} .

2 Вычислить $|A|$ тремя способами.

3 Вычислить $3A$, $2A - 3B$, $A \cdot B$, $B \cdot A$.

4 Вычислить B^{-1} двумя способами.

5 Вычислить $4A + 5B^{-1} + A \cdot B$

Задания к практической работе.

1	$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -7 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	2	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$	4	$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & 5 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 6 & 10 & -7 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -6 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	6	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -11 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -5 \\ 9 & 4 & -7 \\ 14 & 6 & -11 \end{pmatrix}$
7	$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	8	$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
9	$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -5 \\ 4 & 3 & 6 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	10	$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 8 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 10 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$
11	$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$	12	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$
13	$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	14	$A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ 5 & -3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 10 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Практическое занятие № 5. Вычисление определителей

Цель работы: научиться вычислять определители второго и третьего порядка.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Определителем второго порядка, соответствующим матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ называется число } a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2 Определитель второго порядка равен разности попарных произведений элементов главной и побочной диагоналей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3 Определителем третьего порядка, соответствующим матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ называется число } a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

4 Определитель можно вычислить, используя непосредственно его определение.

5 Определитель можно вычислить с помощью его разложения по элементам строки или столбца.

6 Определитель можно вычислить способом приведения к треугольному виду, тогда треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Задания к практической работе.

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \quad 3. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad 4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad 5. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad 7. \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \quad 8. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad 9. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad 10. \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$11. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad 12. \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 13. \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad 14. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 15. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$16. \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad 17. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 9 & 8 \end{vmatrix} \quad 18. \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 9 \end{vmatrix} \quad 19. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 9 & 8 \end{vmatrix} \quad 20. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$21. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad 22. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad 23. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} \quad 24. \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} \quad 25. \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$26. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad 27. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad 28. \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad 29. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$30. \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \quad 31. \begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad 32. \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad 33. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Исходные данные:

1 Решить методом Крамера систему линейных уравнений третьего

порядка $\begin{cases} x - 4y - 2z = 3 \\ 3x - 5y - 6z = 23 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$.

Решение:

а) Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & -5 & -6 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5 + 6) + 4 \cdot (3 + 18) - 2(3 + 15) = 1 + 84 - 36 = 49$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.б) Вычислим Δ_x :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 23 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 23 & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 23 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-5 + 6) + 4 \cdot (23) - 2(23) = 3 + 92 - 46 = 49$$

в) Вычислим Δ_y :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 23 & -6 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 23 & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 23 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 23 - 3 \cdot (3 + 18) - 2(-69) = 23 - 66 + 138 = 98$$

г) Вычислим Δ_z :

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & -5 & 23 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 23 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 23 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -23 + 4 \cdot (-69) + 3(3 + 15) = -23 - 276 + 54 = -245$$

г) По формулам Крамера получим:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{49}{49} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{98}{49} = 2; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-245}{49} = -5$$

Ответ: (1; 2; -5)

Задания к практической работе.

1 $\begin{cases} 3x+5y+z=-2 \\ -2x-2y-3z=7 \\ x+4y+z=-5 \end{cases}$	2 $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x-y+3z=2 \\ 4x+3y-z=5 \end{cases}$	3 $\begin{cases} x+y-3z=-3 \\ 2x-y-6z=9 \\ -x+y+4z=-6 \end{cases}$
4 $\begin{cases} 3x-6y-z=1 \\ -x+2y+z=-3 \\ 2x+y+3z=-4 \end{cases}$	5 $\begin{cases} 3x+5y+z=2 \\ 2x-y+2z=1 \\ -x+3y-3z=-4 \end{cases}$	6 $\begin{cases} -x-y+z=-5 \\ 3x+2y+2z=-3 \\ -2x-2y-3z=1 \end{cases}$
7 $\begin{cases} x-y-2z=6 \\ -2x-3y+5z=7 \\ 4x+2y-z=3 \end{cases}$	8 $\begin{cases} 4x-3y+z=3 \\ 3x+2y-2z=-3 \\ -x+3y+z=10 \end{cases}$	9 $\begin{cases} -x+3y-4z=-3 \\ 2x-y-3z=5 \\ -3x+4y+5z=-2 \end{cases}$
10 $\begin{cases} x-y+z=4 \\ 5x-3y-2z=1 \\ 3x+2y-3z=-1 \end{cases}$	11 $\begin{cases} 3x-2y+2z=3 \\ x+2y-5z=3 \\ -4x+y+2z=-3 \end{cases}$	12 $\begin{cases} 3x-2y+2z=5 \\ 5x+y-3z=-6 \\ -2x+2y-z=1 \end{cases}$
13 $\begin{cases} 3x-4y+5z=1 \\ x+2y-z=5 \\ 2x-y+2z=3 \end{cases}$	15 $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x-5y+2z=3 \\ 3x-8y+2z=5 \end{cases}$	16 $\begin{cases} 3x-2y+3z=-2 \\ x+5y-2z=-1 \\ -4x-3y-5z=-5 \end{cases}$
17 $\begin{cases} 4x+5y+4z=3 \\ -7x+2y-z=2 \\ 3x+y+z=-1 \end{cases}$	18 $\begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ x-3y-5z=4 \\ 4x+5y-3z=-1 \end{cases}$	19 $\begin{cases} x-y+z=-4 \\ 5x+6y-2z=-1 \\ 4x-3y-2z=4 \end{cases}$
20 $\begin{cases} -2x+3y-2z=4 \\ x+y+z=-7 \\ 4x-3y-z=6 \end{cases}$	21 $\begin{cases} x+y-z=-3 \\ 4x-2y-5z=5 \\ 3x+2y+7z=4 \end{cases}$	22 $\begin{cases} x-y-z=-3 \\ 2x-2y+5z=1 \\ 3x-y-z=3 \end{cases}$
23 $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ 3x+3y+2z=7 \\ 2x-y-3z=8 \end{cases}$	24 $\begin{cases} 5x+2y-z=-1 \\ 3x-y+3z=-4 \\ x+2y-3z=3 \end{cases}$	25 $\begin{cases} x+y+z=-4 \\ 3x+4y-3z=1 \\ 4x+5y-3z=-1 \end{cases}$

Практическое занятия № 7. Решение СЛАУ методом Гаусса

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений третьего порядка методом Крамера и методом Гаусса.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Система линейных уравнений, содержащая m уравнений и n неизвестных имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где, a_{ij} ($i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$) и b_i ($i=1,2,\dots,m$), постоянные величины.

2 Решением системы уравнений называется такой n -мерный вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, который одновременно является решением каждого из уравнений системы.

4 Суть метода Гаусса состоит в том, что с помощью некоторых операций исходную систему уравнений можно свести к более простой системе. Эта простая система имеет треугольный вид:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1N}x_N &= b_1 \\a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2N}x_N &= b_2 \\a_{33}x_3 + \dots + a_{3N}x_N &= b_3 \\&\dots \\&\dots a_{NN}x_N = b_N\end{aligned}$$

Особенность этой системы - в строках с номером i все коэффициенты a_{ij} при $j < i$ равны нулю. Если мы смогли привести нашу систему уравнений к такому треугольному виду, то решить уравнения уже просто. Из последнего уравнения находим $x_N = b_N / a_{NN}$. Далее подставляем его в предпоследнее уравнение и находим из него x_{N-1} . Подставляем оба найденных решения в следующее с конца уравнение и находим x_{N-2} . И так далее, пока не найдем x_1 , на чем решение заканчивается. Такая процедура называется обратной прогонкой.

5 Если к матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ добавить в качестве $(n+1)$ -

ого столбца матрицу-столбец свободных членов, то получим так называемую расширенную матрицу системы линейных уравнений, а столбец свободных членов отделяют вертикальной линией от остальных столбцов, то есть,

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

6 Для приведения системы уравнений к треугольному виду воспользуемся свойствами: если с системой линейных алгебраических уравнений произвести следующие действия:

- поменять местами два уравнения,
- умножить обе части какого-либо уравнения на произвольное и отличное от нуля действительное (или комплексное) число k ,
- к обеим частям какого-либо уравнения прибавить соответствующие части другого уравнения, умноженные на произвольное число k , то получится эквивалентная система, которая имеет такие же решения (или также как и исходная не имеет решений).

7 Две системы называются эквивалентными (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение

8 Преобразование, применение которого превращает систему в новую систему, эквивалентную исходной, называется эквивалентным или равносильным преобразованием

2 Решить методом Гаусса систему линейных уравнений третьего порядка

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = 3 \\ 3x - 5y - 6z = 23 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$$

Решение:

Запишем систему в матричном виде и приведем ее к треугольной матрице:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & -6 & 23 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \\ 0 & 13 & 7 & -9 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 49 & -245 \end{array} \right)$$

$$\text{Тогда получим: } z = \frac{-245}{49} = -5; \quad y = \frac{14}{7} = 2; \quad x = 3 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) = 1$$

Задания к практической работе.

$$1 \quad \begin{cases} 3x + 5y + z = -2 \\ -2x - 2y - 3z = 7 \\ x + 4y + z = -5 \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x - y + 3z = 2 \\ 4x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

$$3 \quad \begin{cases} x + y - 3z = -3 \\ 2x - y - 6z = 9 \\ -x + y + 4z = -6 \end{cases}$$

$$4 \quad \begin{cases} 3x - 6y - z = 1 \\ -x + 2y + z = -3 \\ 2x + y + 3z = -4 \end{cases}$$

$$5 \quad \begin{cases} 3x + 5y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 1 \\ -x + 3y - 3z = -4 \end{cases}$$

$$6 \quad \begin{cases} -x - y + z = -5 \\ 3x + 2y + 2z = -3 \\ -2x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$7 \quad \begin{cases} x - y - 2z = 6 \\ -2x - 3y + 5z = 7 \\ 4x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

$$8 \quad \begin{cases} 4x - 3y + z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = -3 \\ -x + 3y + z = 10 \end{cases}$$

$$9 \quad \begin{cases} -x + 3y - 4z = -3 \\ 2x - y - 3z = 5 \\ -3x + 4y + 5z = -2 \end{cases}$$

$$10 \quad \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 5x - 3y - 2z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$11 \quad \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 3 \\ x + 2y - 5z = 3 \\ -4x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

$$12 \quad \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x + y - 3z = -6 \\ -2x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$13 \quad \begin{cases} 3x - 4y + 5z = 1 \\ x + 2y - z = 5 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$15 \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - 5y + 2z = 3 \\ 3x - 8y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$16 \quad \begin{cases} 3x - 2y + 3z = -2 \\ x + 5y - 2z = -1 \\ -4x - 3y - 5z = -5 \end{cases}$$

$$17 \quad \begin{cases} 4x + 5y + 4z = 3 \\ -7x + 2y - z = 2 \\ 3x + y + z = -1 \end{cases}$$

$$18 \quad \begin{cases} 2x + 2y - z = 1 \\ x - 3y - 5z = 4 \\ 4x + 5y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$19 \quad \begin{cases} x - y + z = -4 \\ 5x + 6y - 2z = -1 \\ 4x - 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$20 \quad \begin{cases} -2x + 3y - 2z = 4 \\ x + y + z = -7 \\ 4x - 3y - z = 6 \end{cases}$$

$$21 \quad \begin{cases} x + y - z = -3 \\ 4x - 2y - 5z = 5 \\ 3x + 2y + 7z = 4 \end{cases}$$

$$22 \quad \begin{cases} x - y - z = -3 \\ 2x - 2y + 5z = 1 \\ 3x - y - z = 3 \end{cases}$$

$$23 \quad \begin{cases} x + y - z = -1 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \\ 2x - y - 3z = 8 \end{cases}$$

$$24 \quad \begin{cases} 5x + 2y - z = -1 \\ 3x - y + 3z = -4 \\ x + 2y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$25 \quad \begin{cases} x + y + z = -4 \\ 3x + 4y - 3z = 1 \\ 4x + 5y - 3z = -1 \end{cases}$$

Практическое занятие № 8. Решение СЛАУ разными способами

Задача. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение:

Решим систему матричным способом, для этого вычислим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \text{ где } A_{ij} - \text{алгебраические дополнения к элементам}$$

матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 5 - 1 + 10 - 6 = 12 \neq 0 - \text{матрица невырожденная.}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(10 - 2) = -8$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3 + 1) = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 5) = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 5 = 8$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -8 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -8 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \cdot 12 & 3 \cdot 3 & (-3) \cdot 3 \\ -8 \cdot 12 & 5 \cdot 3 & (-1) \cdot 3 \\ 4 \cdot 12 & (-4) \cdot 3 & 8 \cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ -84 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Решим систему методом Крамера. Главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}. \text{ Разложим определитель по элементам первой строки, пользуясь}$$

$$\text{формулой } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

Запишем и вычислим вспомогательные определители

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 12 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 12 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 12 \cdot 8 + 12 = -84$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 12 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 + 12 + 12 \cdot 4 = 60$$

$$\text{Тогда } x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{0}{12} = 0$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = -\frac{84}{12} = -7$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{60}{12} = 5$$

Ответ: (0; -7; 5)

Решим систему методом Гаусса, для этого составим расширенную матрицу системы и упростим ее приведением к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array} \right)$$

Таким образом, система равносильна системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + \frac{5}{4}x_3 = -\frac{3}{4} \\ -3x_3 = -15 \end{cases}$$

Находим $x_3 = 5$

$$x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} \cdot 5 = -\frac{28}{4} = -7$$

$$x_1 = 12 - 7 - 5 = 0$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -7$, $x_3 = 5$

При решении всеми методами одной и той же системы, мы получим один ответ.

Задание к практической работе

Задача. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{array}{lll} 1. \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases} & 2. \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \\ 2x + 7y - 5z = 13 \end{cases} & 3. \begin{cases} 2x - 7y + 5z = 9 \\ x + 5y - 5z = -2 \\ 4x - 2y + 7z = 24 \end{cases} \\ 4. \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \\ y + z = 2 \end{cases} & 5. \begin{cases} x + 3y + 4z = 17 \\ 2x - 3y + 5z = 16 \\ 3x + 4y - z = 7 \end{cases} & 6. \begin{cases} 2x + 2y - 4z = 6 \\ x + 3y - 5z = 6 \\ 3x - 2y + 6z = 6 \end{cases} \\ 7. \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 22 \\ x - 3y - 6z = -9 \\ 2x + 4y - 4z = 10 \end{cases} & 8. \begin{cases} 2x - y - z = 14 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases} & 9. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases} \end{array}$$

Практическое занятия № 9. Действия над комплексными числами

Цель работы: закрепить навыки выполнения действий с комплексными числами

Задание

1 Даны числа z_1 и z_2 . Выполнить следующие действия над комплексными числами в алгебраической форме: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) z_1 / z_2 ;

$$д) (z_1 + 3)z_2 + \frac{z_1 \cdot i}{z_2 - 4i} - 2$$

2 Выполнить действия над числами в тригонометрической форме: а) $z_1 \cdot z_2$; б) z_1 / z_2 ; в) z_2^6 .

3 Выполнить действия в тригонометрической форме и представить результат в тригонометрической, алгебраической и показательной формах

4 Найти значения корней

Задания к практической работе.

Задание 1

- $z_1 = 3 + 2i, z_2 = -1 + 5i$
- $z_1 = 1 + 3i, z_2 = -2 + 4i$
- $z_1 = -2 + i, z_2 = 4 + i$
- $z_1 = -2 + 2i, z_2 = 1 + 3i$
- $z_1 = 5 + i, z_2 = -1 - i$
- $z_1 = 3 - 2i, z_2 = 4 + 2i$
- $z_1 = 5 + i, z_2 = 1 + 2i$
- $z_1 = 3 + i, z_2 = 4 + 2i$
- $z_1 = 1 - 2i, z_2 = 3 + 2i$
- $z_1 = 4 + 3i, z_2 = -1 - i$

Задание 3

- $\left(\frac{0,5 - i \cdot 0,5\sqrt{3}}{0,5\sqrt{3} - i \cdot 0,5} \right)^3$
- $(2 + \sqrt{12}i)^5$
- $[(\sqrt{3} - i)(-1 + i)]^4$
- $\left(\frac{1 - i}{-2 - 2i} \right)^4$
- $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i} \right)^{-3}$
- $\left(\frac{2\sqrt{3} - 2i}{\sqrt{3} + i} \right)^3$
- $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i} \right)^6$
- $\left(\frac{1 - i}{-2 - 2i} \right)^{-6}$
- $[(\sqrt{3} - i)(-1 + i)]^6$
- $\left(\frac{2\sqrt{3} - 2i}{\sqrt{3} + i} \right)^3$

Задание 2

- $z_1 = 8(\cos 55^\circ + \sin 55^\circ), z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ),$
- $z_1 = 5(\cos 48^\circ + \sin 48^\circ), z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ),$
- $z_1 = 3(\cos 70^\circ + \sin 70^\circ), z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ),$
- $z_1 = 10(\cos 105^\circ + \sin 105^\circ), z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ),$
- $z_1 = 12(\cos 145^\circ + \sin 145^\circ), z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ),$
- $z_1 = 7(\cos 255^\circ + \sin 255^\circ), z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ),$
- $z_1 = 9(\cos 168^\circ + \sin 168^\circ), z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ),$
- $z_1 = 6(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ), z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ),$
- $z_1 = 3(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ), z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ),$
- $z_1 = 10(\cos 75^\circ + \sin 75^\circ), z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ),$

Задание 4

- $\sqrt[4]{i}$
- $\sqrt[4]{-i}$
- $\sqrt[3]{-i}$
- $\sqrt[3]{-1}$
- $\sqrt[4]{16i}$
- $\sqrt[4]{-16i}$
- $\sqrt{16i}$
- $\sqrt[3]{-8i}$
- $\sqrt[3]{-8}$
- $\sqrt[3]{8i}$

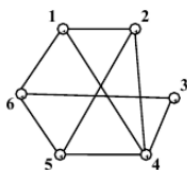
Практическое занятия № 10. Составление матриц смежности и матриц инцидентности для графов заданных геометрически

Цель работы: задание графа, вычисление степеней вершин.

Задания к практической работе.

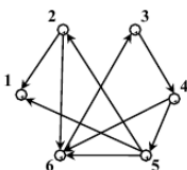
- Орграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
 $E = \{(1; 3); (1; 6); (2; 5); (3; 2); (3; 4);$
 $(4; 1); (4; 5); (5; 3); (6; 2)\}$

2



- Неорграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
 $E = \{(1; 2); (1; 5); (2; 3); (3; 1); (3; 4);$
 $(4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 3)\}$

4



7

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	1	1	0	1	0	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0	1

8

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	1	1
2	1	0	0	0	1	0
3	0	0	0	1	0	1
4	0	0	1	0	1	0
5	1	1	0	1	0	1
6	1	0	1	0	1	0

- Орграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 4); (1; 5); (2; 1); (2; 3); (3; 4);$
 $(4; 2); (4; 6); (5; 3); (6; 3)\}$

Практическое занятия № 11. Выполнение операций над множествами

Цель работы: Выполнение операций над множествами.

Задания к практической работе.

1	$A=\{b, e, f, k, t\}; B=\{f, i, j, p, y\};$ $C=\{j, k, l, y\}; D=\{i, j, s, t, u, y, z\};$ $X=(A \cap C) \cup (B \cap C);$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (D \setminus C)$	8	$A=\{c, m, n, o, q\}; B=\{c, d, m, w\};$ $C=\{m, n, q\}; D=\{c, m, p\};$ $X=(A \cup B) \cap C;$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$
2	$A=\{a, h, m, o, r\}; B=\{j, k, o, u, y\};$ $C=\{g, h, j\}; D=\{g, j, q\};$ $X=(A \cap C) \cup (D \cap B);$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (D \setminus C)$	9	$A=\{b, d, l, p\}; B=\{b, d, e, l, p, x\}$ $C=\{k, l, p, t\}; D=\{d, k, o, p, q, u, v\};$ $X=(A \setminus B) \cap (C \cap D);$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$
3	$A=\{c, e, h, n\}; B=\{e, f, k, n, x\};$ $C=\{b, c, h, p, r, s\}; D=\{b, e, g\};$ $X=(A \setminus B) \cap (C \cup D);$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$	10	$A=\{a, b, f, g, i\}; B=\{c, f, g, i, s, v\};$ $C=\{a, g, h, i\}; D=\{f, w, x\};$ $X=(A \cap B) \cup C;$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$
4	$A=\{b, f, g, m, o\}; B=\{b, g, h, l, u\};$ $C=\{e, f, m\}; D=\{e, g, l, p, q, u, v\};$ $X=(A \cap C) \cup B;$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$	11	$A=\{b, c, h, l, j\}; B=\{e, h, l, s, w\};$ $C=\{a, b, j, k, l, m\}; D=\{a, h, l, w, x\};$ $X=(A \setminus C) \cap \bar{B};$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$
5	$A=\{a, e, f, i\}; B=\{a, b, k, n\};$ $C=\{e, f, n, o, w, x\}; D=\{a, d, e, o, p, t, u\};$ $X=(A \cup B) \cap D;$ $Y=(\bar{A} \cap \bar{B}) \setminus (C \cup D)$	12	$A=\{a, b, h, j, l\}; B=\{b, c, h, l, r, v\};$ $C=\{j, k, n, t, z\}; D=\{b, i, k, v, w\};$ $X=(A \cup B) \cap C;$ $Y=(\bar{A} \cap \bar{B}) \setminus (C \cup D)$

Практические занятия № 12. Нахождение вероятности событий

Цель работы: вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности и по формуле геометрической вероятности, вычисление вероятностей совместных событий, определение вероятности по формулам суммы и произведения

Задания к практической работе.

1 Устройство состоит из четырех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго, третьего и четвертого элементов соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что за время t безотказно будут работать только два элемента

2 Самолет бомбит объект, занимающий площадь 100π м². Зона бомбометания – эллипс с полуосями 200 м и 250 м. Определить вероятность прямого попадания в объект одной бомбой, если предполагать, что попадания бомб в любую точку зоны бомбометания равновероятны.

3 Определить число промахов, если известно, что произведено 16 выстрелов, а частота попадания равна $\frac{1}{4}$

4 Трое охотников одновременно выстрелили по лисе, которая была убита одной пулей. Определить вероятность того, что лиса убита третьим охотником, если вероятности попадания для них соответственно равны 0,2; 0,4; 0,6.

5 Автомобиль во время своего пути может остановиться по четырем причинам. Вероятности остановки по этим причинам соответственно равны 0,2; 0,4; 0,3; 0,7. Найти вероятность хотя бы одной остановки по какой-либо из причин

6 При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов

7 На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что из четырех, вынутых по одной и расположенных в одну линию карточках можно будет прочесть слово трос

8 В ящике 20 сигнальных ракет, из которых 6 красного цвета, остальные зеленого цвета. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу пяти ракет 3 окажутся красного цвета?

Практическое занятие № 13. Построение для выборки ее диаграммы, расчет числовых характеристик

Учебная цель: научиться строить графические диаграммы выборки, рассчитывать характеристики выборки

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Для выборки 1,1,2,-5,4,3,3,8,8,1 определите объем и размах. Запишите выборку в виде вариационного ряда и в виде статистического ряда. Найдите выборочное распределение.

2. Для выборки, заданной статистическим рядом

2	4	6	8
5	2	1	3

постройте 1) полигон частот; 2) полигон относительных частот;

3. Для выборки, заданной вариационным рядом -5, -5, 2, 3, 5,10,15, 15, 20, 20, найдите выборочную среднюю $\bar{x}$; выборочную дисперсию S_0 , несмещенную выборочную дисперсию S .

4. Произведено выборочное обследование коммерческих фирм по затратам на рекламу, результаты которого представлены в таблице:

Затраты на рекламу	Кол-во фирм
--------------------	-------------

(усл. ден. ед.)	
40-60	4
60-80	3
80-100	5
100-120	6
120-140	2

По данным выборочного обследования постройте гистограмму частот, используя мастер диаграмм в MS Excel.

Вариант 2

1. Для выборки -3,1,2,4,3,4,4,1,2,1 определите объем и размах. Запишите выборку в виде вариационного ряда и в виде статистического ряда. Найдите выборочное распределение.

2. Для выборки, заданной статистическим рядом

-1	1	3	7
1	3	4	2

постройте 1) полигон частот; 2) полигон относительных частот

3. Для выборки, заданной статистическим рядом

-1	1	3	5	7	9
2	2	1	3	1	1

найдите выборочную среднюю $\bar{x}$; выборочную дисперсию S_0 , несмещенную выборочную дисперсию S ;

4. В результате выборочного обследования коммерческих банков о размере прибыли за год получено следующее распределение:

Размер прибыли (млн руб.)	Число банков
10- 20	5
20-30	10
30-40	20
40-50	15
50-60	10

Практическое занятия № 14. Нахождение случайной величины

Цель: научиться определять математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины по заданному распределению.

Задания для индивидуальной работы:

Задание №1. Найдите математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Вариант 1.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,1	0,1	0,09	0,3	0,009	0,3	0,001

Вариант 2.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,2	0,3	0,2	0,06	0,1	0,006	0,1	0,034

Вариант 3.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,3	0,1	0,005	0,1	0,005	0,3	0,09

Вариант 4.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,2	0,4	0,1	0,002	0,1	0,09	0,1	0,008

Вариант 5.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,2	0,1	0,008	0,2	0,09	0,3	0,002

Вариант 6.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,3	0,2	0,1	0,003	0,2	0,095	0,1	0,002

Задание №2. Дискретные независимые случайные величины заданы законами распределения. Найти математическое ожидание произведения $M(XY)$ и $M(2Y)$.

Вариант 1.

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

Вариант 2.

X	2	1
p	0,6	0,4

Y	1	1,25
p	0,8	0,2

Вариант 3.

X	3	2
p	0,7	0,3

Y	0,65	2
p	0,5	0,5

Вариант 4.

X	1	3
p	0,1	0,9

Y	1	1,35
p	0,4	0,6

Вариант 5.

X	2	4
p	0,4	0,6

Y	2	1,85
p	0,8	0,2

Вариант 6.

X	1	4
p	0,5	0,5

Y	0,4	1
p	0,9	0,1

Задание №3.

Вариант 1. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель $p_1=0,6$, $p_2=0,4$, $p_3=0,5$ и $p_4=0,7$. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 2. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель $p_1=0,3$, $p_2=0,4$, $p_3=0,6$ и $p_4=0,5$. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 3. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель $p_1=0,1$, $p_2=0,2$, $p_3=0,6$ и $p_4=0,9$. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 4. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель $p_1=0,7$, $p_2=0,2$, $p_3=0,8$ и $p_4=0,5$. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 5. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель $p_1=0,5$, $p_2=0,4$, $p_3=0,9$ и $p_4=0,2$. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 6. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель $p_1=0,3$, $p_2=0,7$, $p_3=0,3$ и $p_4=0,5$. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Задание №4.

Вариант 1. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,2. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 10 деталей.

Вариант 2. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,3. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 12 деталей.

Вариант 3. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,7. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 15 деталей.

Вариант 4. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,9. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 18 деталей.

Вариант 5. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,8. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 6 деталей.

Вариант 6. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,2. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 20 деталей.

Задание №5

Вариант 1. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 100 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,7.

Вариант 2. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 130 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,6.

Вариант 3. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 150 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,2.

Вариант 4. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 200 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,4.

Вариант 5. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 400 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,8.

Вариант 6. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 250 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,3.

Задание №6

Вариант 1. Случайная величина X может принимать два возможных значения x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем $x_2 > x_1$. Найти x_1 и x_2 , зная, что $M(X) = 2,7$ и $D(X) = 0,21$.

Вариант 2. Случайная величина X может принимать два возможных значения x_1 с вероятностью 0,4 и x_2 с вероятностью 0,6, причем $x_1 > x_2$. Найти x_1 и x_2 , зная, что $M(X) = 3,4$ и $D(X) = 0,24$.

Контрольные вопросы:

1. Дать определение математического ожидания
2. Что показывает дисперсия случайной величины?
3. Как найти среднее квадратичное отклонение?

